

# Осесимметричное течение жидкости в проницаемом слое между двумя водоупорами

удк 532.546

В.В. Молчанов

В широком ряде случаев фильтрация жидкости происходит в условиях её фиксированного уровня или заданного расхода на границе области. Например, моделирование просачивания воды из водохранилища под дамбу представляет собой одну из задач такого рода [1]. В настоящей работе рассмотрено осесимметричное течение жидкости при заданном расходе на оси симметрии. Данная проблема имеет широкий прикладной характер, исследования по данной тематике ведутся уже достаточно продолжительное время [1-6]. При этом, как правило, рассматривались безнапорные течения. Отличие исследуемой задачи состоит в наличии непроницаемых границ сверху и снизу пористого слоя. Такие условия более близки к реальным ситуациям, когда проницаемый пласт имеет конечную мощность. При этом появляются зоны напорного (вблизи скважины) и безнапорного течения переменной протяжённости.

Рассмотрим однородный пористый слой, ограниченный сверху и снизу горизонтальными непроницаемыми границами (рис.1). Допустим, что в горизонтальный пласт мощности  $H$ , имеющий пористость  $m$ , через поверхность прямого кругового цилиндра с осью  $z$  и заданным радиусом  $r$  поступает жидкость с известными плотностью  $\rho$ , вязкостью  $\mu$  и суммарным расходом  $Q(t)$ . Требуется установить, как будет изменяться с течением времени область, занятая жидкостью.

Будем считать жидкость несжимаемой, пористую среду неизменяемой, т.е.  $m = \text{const}$ .

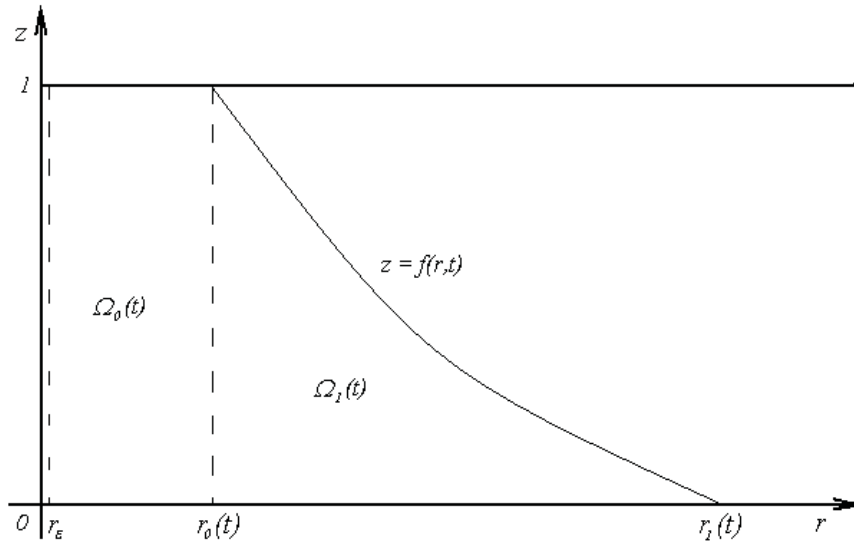


Рис. 1: Осесимметричное течение одной жидкости при заданном расходе и верхней границе

В этом случае уравнение неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  - скорость фильтрации. Также предположим, что движение жидкости следует закону Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho \mathbf{g}), \quad (2)$$

где  $k$  - проницаемость пористой среды,  $\mu$  - вязкость жидкости,  $p$  - давление,  $\mathbf{g}$  - вектор ускорения силы тяжести. Граничное условие на водоупорах  $z = H$  и  $z = 0$ :

$$w = 0. \quad (3)$$

В области, занятой жидкостью, можно выделить две подобласти  $\Omega_0(t)$  и  $\Omega_1(t)$ , являющиеся напорной и безнапорной областями течения соответственно. При этом часть границы области  $\Omega_1(t)$  является свободной поверхностью, изменяющейся со временем. Пусть свободная граница задана уравнением

$$S(t) : F = z - f(x, y, t) = 0. \quad (4)$$

Динамическое и кинематическое условия на ней имеют вид

$$p = p_0, \quad m \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{v}_n = 0, \quad (5)$$

где  $p_0$  – атмосферное давление,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль,  $\mathbf{v}_n$  – нормальная составляющая вектора скорости фильтрации. Система уравнений (1)–(5) является замкнутой математической моделью фильтрации жидкости в горизонтальном пласте с заданным расходом одной совершенной скважины. Искомой является функция  $f(x, y, t)$ , определяющая согласно уравнению динамику свободной поверхности.

В силу уравнения неразрывности во всей области течения имеет место равенство

$$-Q(t) + \int_{S(t)} \mathbf{v}_n ds = 0. \quad (6)$$

В случае осесимметричного течения оно принимает вид

$$-Q(t) + 2\pi m \int_{r_0(t)}^{r_1(t)} r \frac{\partial f}{\partial t}(r, t) dr = 0. \quad (7)$$

Здесь  $r = r_0(t)$  – линия выхода свободной поверхности на кровлю пласта и  $r = r_1(t)$  – линия пересечения её с водоупором.

Учитывая уравнение неразрывности (1), кинематические условия на водоупоре (3) и свободной границе (5), получаем следующее точное соотношение:

$$m \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{q}$  – расход через отрезок вертикальной прямой, а  $\operatorname{div}$  обозначает дивергенцию по переменным  $x$  и  $y$ . Теперь примем, что в области течения давление искомым образом зависит от переменных  $x$ ,  $y$  и  $t$ , но по вертикальной координате  $z$  распределено согласно гидростатическому закону [1,2,5]. При этих условиях соотношение (8) переходит в хорошо известное в теории фильтрации уравнение Буссинеска [2]:

$$m \frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \operatorname{div}_{x,y}(f \nabla f), \quad (9)$$

где  $\kappa = k\rho g/\mu$  – коэффициент фильтрации. Введём в рассмотрение безразмерные величины  $r/H$ ,  $f/H$ ,  $t/T$ ,  $Q/Q_0$ , где  $H$ ,  $T$  и  $Q_0$  – некоторые характерные длина,

время и расход соответственно. Сохраняя за безразмерными величинами прежние обозначения и выбрав масштаб времени  $T$  из условия  $T = 2\pi m H^3 / Q_0$ , приведём равенство (7) к виду

$$Q(t) = \int_{r_0(t)}^{r_1(t)} r \frac{\partial f}{\partial t}(r, t) dr. \quad (10)$$

Будем искать частное решение поставленной задачи в форме

$$f(r, t) = \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{r}{l(t)}, \quad (11)$$

с искомыми функциями  $\varphi(\xi)$  и  $l(t)$ . На таких решениях соотношение (10) приводится к виду

$$Q(t) = -l(t)l'(t) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi = 0. \quad (12)$$

где  $\xi_0$  соответствует  $r_0(t)$ , а  $\xi_1 - r_1(t)$ . Отсюда, в частности, следует необходимость условия, связывающего изменение во времени поступающего в область течения расхода  $Q(t)$  и растяжения продольной координаты по времени  $l(t)$ :  $Q(t)/l(t)l'(t) = const$ .

В автомодельных переменных расход через цилиндрическую поверхность с осью  $z$ , расположенную в области  $\Omega_1$ , имеет вид

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_r) r d\alpha = -2\pi \kappa r f \frac{\partial f}{\partial r} = -2\pi \kappa \xi \varphi \frac{d\varphi}{d\xi}. \quad (13)$$

В силу непрерывности поля скоростей в области  $\Omega_1(t)$ , правая часть (13) при  $\xi \rightarrow \xi_0 + 0$  стремится к общему расходу, т.е.

$$Q_0 Q(t) = -2\pi \kappa H^2 \xi_0 \varphi \frac{d\varphi}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0+0}. \quad (14)$$

Определим характерный расход  $Q_0$  по правилу  $Q_0 = 2\pi \kappa H^2$ . Т.к. правая часть соотношения (14) не зависит от времени, то в силу указанной связи между  $Q(t)$  и  $l(t)$  получаем равенство  $l(t) = \sqrt{t}$ . Таким образом, показатель автомодельности  $\nu = \frac{1}{2}$ , и потому автомодельное решение обязано иметь вид

$$f(r, t) = \varphi(\xi), \quad r = \sqrt{t}\xi, \quad Q = const. \quad (15)$$

Итак, на рассматриваемом классе автомодельных решений (15) уравнение (9) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2 \frac{d}{d\xi} \left[ \xi \varphi \frac{d\varphi}{d\xi} \right] + \xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi} = 0, \quad \xi \in [\xi_0; \xi_1], \quad (16)$$

где точки  $\xi_0$  и  $\xi_1$  определяются условиями

$$\varphi(\xi_0) = 1, \quad \varphi(\xi_1) = 0, \quad (17)$$

а условия непрерывности потоков в этих точках принимают вид

$$(1 - \varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \varphi \frac{d\varphi}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = 0. \quad (18)$$

Решение двухточечной краевой задачи (16)–(18) осложняется тем, что неизвестна сама область решения  $[\xi_0; \xi_1]$ . К тому же, уравнение (16) в силу краевых условий (18) вырождается на границах этого промежутка.

Проинтегрируем теперь соотношение (12) по частям и воспользуемся условиями (18). Тогда найдём, что

$$\xi_0^2 + 2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi \varphi d\xi = 2Q. \quad (19)$$

Интегрирование (16) в пределах от  $\xi_0$  до  $\xi$  с учётом условий (17) и уравнения (19) даёт соотношение

$$2\xi\varphi \frac{d\varphi}{d\xi} + \xi^2\varphi + 2 \int_{\xi}^{\xi_1} \xi \varphi d\xi = 2Q. \quad (20)$$

Произведём здесь замену переменных, которая позволит исключить неизвестный параметр  $\xi_1$ :

$$s = \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1}, \quad \varphi(\xi) = \xi_1^2 \Phi(s). \quad (21)$$

Тогда уравнение (20) примет вид

$$-(1-s)\Phi \frac{d\Phi}{ds} + \frac{1}{2}(1-s)^2\Phi + \int_0^s (1-z)\Phi(z)dz = 0, \quad (22)$$

а параметр  $\xi_1$  находится из замены (21), если известна функция  $\Phi(s)$ . Уравнение (14) и условие (17) после подстановки (21) принимают вид

$$(1-s_0)\xi_1^4 \Phi \Phi' \Big|_{s=s_0} = Q, \quad \xi_1^2 \Phi(s_0) = 1,$$

где  $s_0 = 1 - \xi_0/\xi_1$ . Исключим из первого уравнения этой системы параметр  $\xi_1$ . Получим

$$(1 - s_0)\Phi'(s_0) - Q\Phi(s_0) = 0, \quad \xi_1^2\Phi(s_0) = 1. \quad (23)$$

Таким образом, мы получили задачу (22), (23), для которой в отличие от задачи (16)–(18) определена область решения  $s \in [0; 1]$  и подлежащий определению параметр  $s_0$  не содержится в основном уравнении.

Решение уравнения (22) будем искать в виде ряда, а именно  $\Phi(s) = \sum_{k \geq 0} a_k s^{k+\beta}$ . Нетрудно убедиться, что только при  $\beta = 1$  возможно нетривиальное решение подобного вида. Таким образом, точка вырождения течения  $\xi = \xi_0$  является нулём первого порядка для искомого решения. В этом случае

$$\Phi(s) = s \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \quad (24)$$

Используя представление (24), запишем уравнение (22) в виде

$$\begin{aligned} & -a_0^2 + \frac{1}{2}a_0 + (a_0^2 - 3a_1a_0 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_0)s + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n+l=k-1} a_n a_l (l+1)s^k - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n+l=k} a_n a_l (l+1)s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - 2a_{k-1} + a_{k-2})s^k + \\ & + \frac{1}{k+1} \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} - a_{k-2})s^k = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Приравнивая нулю в последнем соотношении коэффициенты при степенях  $s^k$ , приходим к рекуррентной системе уравнений на коэффициенты ряда (24)

$$\begin{aligned} & -a_0^2 + \frac{1}{2}a_0 = 0, \\ & a_0^2 - 3a_1a_0 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_0 = 0, \\ & a_k = \frac{2}{k+1} \left[ \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)a_i a_{k-i-1} - \sum_{i=1}^{k-1} (k-i+1)a_i a_{k-i} - \right. \\ & \left. - \frac{k}{k+1}a_{k-1} + \frac{k-1}{2(k+1)}a_{k-2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Приведём эту систему к более удобной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{18}, \quad a_3 = \frac{5}{144}, \quad a_4 = \frac{287}{10800}, \\ a_k = \frac{k^2 + 1}{(k + 1)^2} a_{k-1} - \frac{11 - 6k + k^2}{9(k + 1)^2} a_{k-2} + \frac{k - 2}{9(k + 1)} a_{k-3} + \\ + \frac{2}{k + 1} \left[ \sum_{i=3}^{k-3} (k - i) a_i (a_{k-i-1} - a_{k-i}) - \sum_{i=3}^{k-3} a_i a_{k-i} \right]. \end{array} \right. \quad (26)$$

На основе системы (26) были проведены расчёты, результаты которых приведены в таблице 1.

Для сходимости ряда (24) при  $s \in [0; 1)$  достаточно ограниченности  $a_k$ . Результаты численного эксперимента, приведённые в табл. 1, а также на рис.2 показывают, что эти коэффициенты стремятся к нулю.

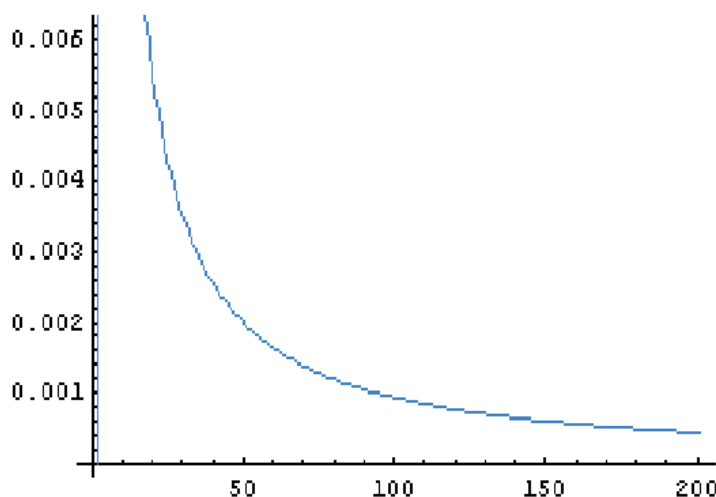


Рис. 2: Кривая, характеризующая порядок убывания коэффициентов ряда (24)

В случае плоскопараллельного течения жидкости в пористом слое между двумя горизонтальными водоупорами уравнение, аналогичное уравнению (22), имеет более простой вид, а именно

$$-\Phi_1 \frac{d\Phi_1}{ds} + (1 - s)\Phi_1 + \frac{1}{2} \int_0^s \Phi_1(z) dz = 0. \quad (27)$$

Если искать решение этого уравнения в виде ряда  $\Phi_1(s) = s \sum_{k \geq 0} b_k s^k$ , то соответствующее рекуррентное соотношение на его коэффициенты выглядит следующим

Таблица 1: Значения коэффициентов  $a_k$ , найденные по рекуррентной формуле

$k$	$a_k$	$k$	$a_k$
0	0.5	10	0.01086
1	0.0	11	0.00984
2	0.055556	12	0.00899
3	0.03472	13	0.00827
4	0.02657	14	0.00765
5	0.02164	15	0.00711
6	0.01815	16	0.00664
7	0.01559	17	0.00623
8	0.01363	18	0.00586
9	0.01209	19	0.00554

образом

$$b_0 = 1, \quad (28)$$

$$b_k = \frac{1}{k+3} \left[ - \sum_{n=1}^{k-1} b_n b_{k-n} (k-n+1) + b_{k-1} \frac{2k+1}{2(k+1)} \right].$$

На рис.3 представлены графики функции  $\Phi(s)$  для осесимметрического случая, и аналогичной функции  $\Phi_1(s)$  для плоскопараллельного течения.

Для определения неизвестных параметров  $\xi_0$  и  $\xi_1$  воспользуемся соотношениями (23). Численные эксперименты подтверждают, что левая часть первого уравнения (23) является монотонной функцией  $s_0$ , меняющей знак на интервале  $(0; 1)$ . Поэтому решение системы существует и определяется однозначно при любом  $Q > 0$ .

На рис.4 представлены результаты серии расчётов, иллюстрирующие зависимость формы свободной поверхности от заданного расхода  $Q$ . Функция  $\Phi(s)$  приближалась первыми двадцатью слагаемыми ряда. Вычисление значения  $s_0$  производилось методом хорд с допустимой погрешностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Величины параметров  $s_0$ ,  $\xi_0$  и  $\xi_1$  для каждого расчётного случая приведены в таблице 2.



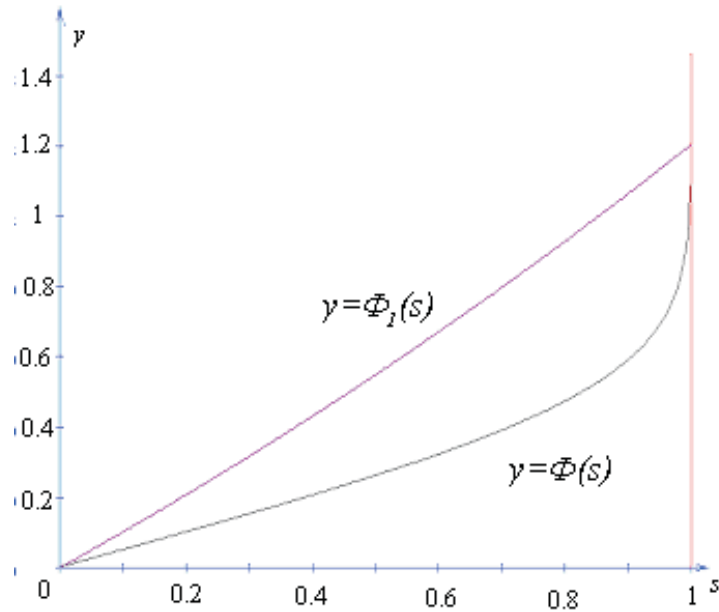


Рис. 3: Графики функций  $\Phi(s)$  и  $\Phi_1(s)$ , соответствующие осесимметричному и плоскопараллельному течению жидкости между двумя горизонтальными водоупорами

Как видно из приведённых графиков, при увеличении расхода значение  $\xi_0$  стремится к  $\xi_1$ , свободная поверхность приближается к вертикальной, что является ожидаемым результатом. Следует отметить, что единственным управляющим параметром, определяющим вид кривой  $z = \varphi(\xi)$ , является безразмерный расход  $Q$ . При этом физические и геометрические параметры жидкости и пористого слоя обуславливают выбор характерного времени  $T$  и характерного расхода  $Q_0$ . Поскольку  $Q_0 = 2\pi\kappa H^2$ , то при неизменности остальных условий уменьшение высоты пористого слоя (или уменьшение коэффициента фильтрации  $\kappa$ ) влечёт уменьшение  $Q_0$ . В результате увеличится безразмерный расход  $Q$ . На рис.5 представлены графики величин  $\xi_0$  и  $\xi_1$  как функций расхода. Проведённые расчёты подтверждают асимптотическое сближение этих величин с ростом  $Q$ .

Рассмотрена осесимметричная задача о проникновении в однородный горизонтальный пласт закачиваемой жидкости. Построено автомодельное решение с показателем автомодельности  $\nu = \frac{1}{2}$ . Решение находилось в виде ряда, коэффициенты

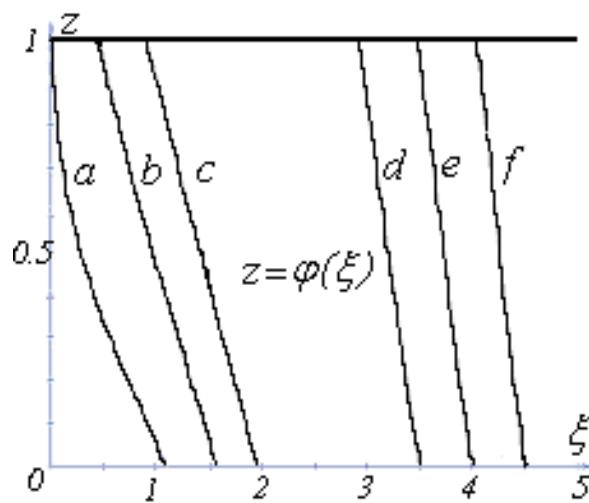


Рис. 4: Течение между двумя горизонтальными водоупорами  $z = 0$  и  $z = 1$  при заданном расходе  $Q$ :  $a) Q = 0.1$ ,  $b) Q = 0.5$ ,  $c) Q = 1$ ,  $d) Q = 5$ ,  $e) Q = 7$ ,  $f) Q = 10$

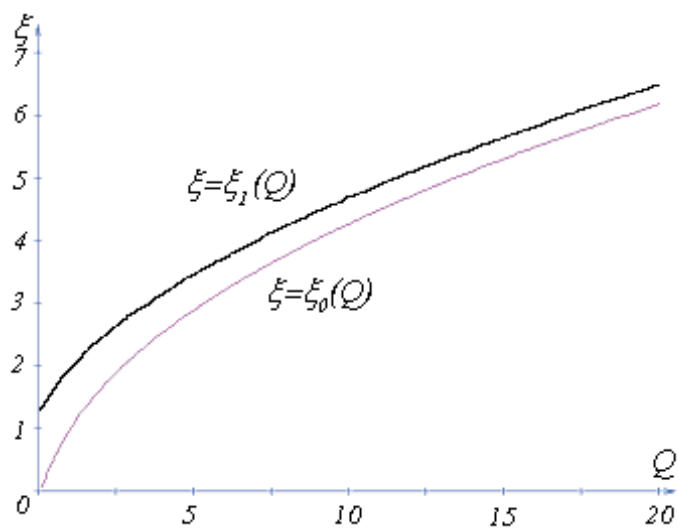


Рис. 5: Графики зависимости параметров течения  $\xi_0$  и  $\xi_1$  от заданного расхода  $Q$

Таблица 2: Значения параметров  $s_0$ ,  $\xi_0$  и  $\xi_1$  при заданном расходе  $Q$

$Q$	$s_0$	$\xi_0$	$\xi_1$
0.1	0.98657	0.01477	1.09960
0.5	0.70651	0.46812	1.59500
1.0	0.50857	0.95377	1.94081
5.0	0.16644	2.88457	3.46053
7.0	0.12487	3.49898	3.99826
10.0	0.09085	4.26357	4.68963

которого определяются заданным рекуррентным соотношением. Исследован характер вырождения свободной границы на подошве и кровле пласта. Проведено сопоставление решений задачи для осесимметричного и плоскопараллельного случая. Результаты подкреплены серией численных экспериментов. Произведён анализ влияния физических параметров задачи на её решение. В частности, показано, что в пласте с меньшей мощностью или при малых значениях коэффициента фильтрации свободная поверхность приближается к вертикальной.

## Список литературы

- [1] *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., "Наука". 1977.
- [2] *Капранов Ю.И.* О некоторых решениях системы уравнений Буссинеска. Сб.: Динамика неоднородной жидкости. Институт гидродинамики СО АН СССР, (1982).
- [3] *Babu D.K., Van Genuchten M.Th.* A perturbation solution of the nonlinear Boussinesq equation: the case of constant injection into a radial aquifer. Journal of Hydrology. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, (1980). 48, 269-280.
- [4] *Huppert H.E.* The Intrusion of Fluid Mechanics into Geology. Journal of Fluid Mechanics. Cambridge university press. (1986). 173, 557-594.
- [5] *Woods A.W. & Mason R.* The Dynamics of Two-layer Gravity-driven Flows in Permeable Rock. Journal of Fluid Mechanics. Cambridge university press. (2000). 421, 83-114.
- [6] *Huppert H.E. & Woods A.W.* Gravity-driven Flows in Porous Layers. Journal of Fluid Mechanics. Cambridge university press. (1995). 292, 55-70.

Молчанов Владимир Викторович  
Россия, 630090, Новосибирск,  
Проспект академика Лаврентьева 15  
ИГиЛ, лаборатория фильтрации  
e-mail: molvv82@mail.ru  
тел.: (383 2) 66 96 83